A model of type theory supporting quotient inductive-inductive types

Ambrus Kaposi Szumi Xie

DCS 2021, Budapest

EFOP-3.6.3-VEKOP-16-2017-00002

SZÉCHENYI 2020
Magyarország Kormánya
Európai Unió
Európai Szociális Alap
BEFEKTETÉS A JÖVŐBE

Overview

A quotient inductive-inductive type (QIIT) signiture is a context in the universal QIIT

All QIITs can be reduced to the universal QIIT

We show that the setoid model of type theory supports the universal QIIT

Examples of quotient inductive-inductive types (QIITs)

Examples of QIITs

$$
\begin{aligned}
\mathsf{Con} &: \mathsf{Set} \\
\mathsf{Ty} &: \mathsf{Con} \to \mathsf{Set} \\
\bullet &: \mathsf{Con} \\
- \triangleright - &: (\Gamma : \mathsf{Con}) \to \mathsf{Ty}\ \Gamma \to \mathsf{Con} \\
\mathsf{U} &: \mathsf{Ty}\ \Gamma \\
\mathsf{El} &: \mathsf{Ty}\ (\Gamma \triangleright \mathsf{U}) \\
\Sigma &: (A : \mathsf{Ty}\ \Gamma) \to \mathsf{Ty}\ (\Gamma \triangleright A) \to \mathsf{Ty}\ \Gamma \\
\mathsf{eq} &: \Gamma \triangleright \Sigma\ A\ B = \Gamma \triangleright A \triangleright B
\end{aligned}
$$

Other examples: Cauchy real numbers, partiality monad, intrinsic syntax for programming languages

What is a QIIT in general?

There is a QIIT called the *universal QIIT*

This is a syntax for a small type theory

A signature for a QIIT is a context in the universal QIIT

Example: $\mathsf{Nat} : \mathsf{U},\ \mathsf{zero} : \mathsf{El}\ \mathsf{Nat},\ \mathsf{suc} : \mathsf{Nat} \Rightarrow \mathsf{El}\ \mathsf{Nat}$

All QIITs can be constructed from the universal QIIT

The universal QIIT in a model

A model of type theory supports the universal QIIT:

- notion of algebra
- notion of homomorphism
- there is an algebra (constructor)
- for every other algebra there is a homomorphism from the constructor to that algebra (recursor)
- the recursor is unique

The universal QIIT in a model

A model of type theory supports the universal QIIT:

- notion of algebra
- notion of homomorphism
- there is an algebra (constructor)
- for every other algebra there is a homomorphism from the constructor to that algebra (recursor)
- the recursor is unique

Rest of this talk:

- How to express all of these for a model of type theory
- Define a model which supports the universal QIIT
- How we implemented this in Agda

Specification of the universal QIIT in a model

Model of type theory

CwF with extra structure:

$$
\begin{aligned}
\mathsf{Con} &: \mathsf{Set} \\
\mathsf{Ty} &: \mathsf{Con} \to \mathsf{Set} \\
\mathsf{Sub} &: \mathsf{Con} \to \mathsf{Con} \to \mathsf{Set} \\
\mathsf{Tm} &: (\Gamma : \mathsf{Con}) \to \mathsf{Ty}\,\Gamma \to \mathsf{Set} \\
\Pi &: (A : \mathsf{Ty}\,\Gamma) \to \mathsf{Ty}\,(\Gamma \triangleright A) \to \mathsf{Ty}\,\Gamma \\
\mathsf{lam} &: \mathsf{Tm}\,(\Gamma \triangleright A)\,B \to \mathsf{Tm}\,\Gamma\,(\Pi\,A\,B) \\
\mathsf{app} &: \mathsf{Tm}\,\Gamma\,(\Pi\,A\,B) \to \mathsf{Tm}\,(\Gamma \triangleright A)\,B \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

A model supports the universal QIIT: algebra

$$
\begin{aligned}
\mathsf{Con} &: \mathsf{Set} \\
\mathsf{Ty} &: \mathsf{Con} \to \mathsf{Set} \\
\mathsf{Sub} &: \mathsf{Con} \to \mathsf{Con} \to \mathsf{Set} \\
\mathsf{Tm} &: (\Gamma : \mathsf{Con}) \to \mathsf{Ty}\,\Gamma \to \mathsf{Set} \\
\bullet &: \mathsf{Con} \\
- \rhd - &: (\Gamma : \mathsf{Con}) \to \mathsf{Ty}\,\Gamma \to \mathsf{Con} \\
\mathsf{U} &: \mathsf{Ty}\,\Gamma \\
\mathsf{El} &: \mathsf{Tm}\,\Gamma\,\mathsf{U} \to \mathsf{Ty}\,\Gamma \\
\Pi &: (a : \mathsf{Tm}\,\Gamma\,\mathsf{U}) \to \\
&\quad \mathsf{Ty}\,(\Gamma \rhd \mathsf{El}\,a) \to \mathsf{Ty}\,\Gamma \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathsf{Con}^{\mathsf{s}} &: \mathsf{Ty}\ \bullet \\
\mathsf{Ty}^{\mathsf{s}} &: \mathsf{Ty}\ (\bullet \rhd \mathsf{Con}^{\mathsf{s}}) \\
\mathsf{Sub}^{\mathsf{s}} &: \mathsf{Ty}\ (\bullet \rhd \mathsf{Con}^{\mathsf{s}} \rhd \mathsf{Con}^{\mathsf{s}}[\epsilon]) \\
\mathsf{Tm}^{\mathsf{s}} &: \mathsf{Ty}\ (\bullet \rhd \mathsf{Con}^{\mathsf{s}} \rhd \mathsf{Ty}^{\mathsf{s}}) \\
\bullet^{\mathsf{s}} &: \mathsf{Tm}\ \bullet\ \mathsf{Con}^{\mathsf{s}} \\
\rhd^{\mathsf{s}} &: \mathsf{Tm}\,(\bullet \rhd \mathsf{Con}^{\mathsf{s}} \rhd \mathsf{Ty}^{\mathsf{s}})\,(\mathsf{Con}^{\mathsf{s}}[\epsilon]) \\
\mathsf{U}^{\mathsf{s}} &: \mathsf{Tm}\,(\bullet \rhd \mathsf{Con}^{\mathsf{s}})\,\mathsf{Ty}^{\mathsf{s}} \\
\mathsf{El}^{\mathsf{s}} &: \mathsf{Tm}\,(\bullet \rhd \mathsf{Con}^{\mathsf{s}} \rhd \mathsf{Tm}^{\mathsf{s}}[\mathsf{id}, \mathsf{U}^{\mathsf{s}}])\,(\mathsf{Ty}^{\mathsf{s}}[\mathsf{wk}^1]) \\
\Pi^{\mathsf{s}} &: \mathsf{Tm}\,(\bullet \rhd \mathsf{Con}^{\mathsf{s}} \rhd \mathsf{Tm}^{\mathsf{s}}[\mathsf{id}, \mathsf{U}^{\mathsf{s}}] \\
&\qquad \rhd \mathsf{Ty}^{\mathsf{s}}[\epsilon, \rhd^{\mathsf{s}}[\mathsf{wk}^1, \mathsf{El}^{\mathsf{s}}]])\,(\mathsf{Ty}^{\mathsf{s}}[\mathsf{wk}^2]) \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

A model supports the universal QIIT: implementation

```
Πᵀ : ∀ Conˢ Tyˢ Tmˢ → ▶ᵀ Conˢ Tyˢ → ∀ Uˢ → Elᵀ Conˢ Tyˢ Tmˢ Uˢ → Set₁
Πᵀ Conˢ Tyˢ Tmˢ ▶ˢ Uˢ Elˢ = Tm Πᶜ Πᴿ
  module Πᵀ where
  open Conᵀ
  open Tyᵀ Conˢ
  open Tmᵀ Conˢ Tyˢ
  open ▶ᵀ  Conˢ Tyˢ
  open Uᵀ  Conˢ Tyˢ
  open Elᵀ Conˢ Tyˢ Tmˢ Uˢ
  Π-Γ = Conˢ
  Π-a = Tmˢ [ < Uˢ > ]T
  Π-B = Tyˢ [ ε ,⟨ Ty-Γ ⟩ ▶ˢ [ wk¹ Π-a ,⟨ ▶-A ⟩ Elˢ ]t ]T

  Πᶜ  = • ▷ Π-Γ ▷ Π-a ▷ Π-B
  Πᴿ  = Tyˢ [ wk² Π-a Π-B ]T
```

A model supports the universal QIIT: impl. (arbitrary model)

```
Πᵀ : ∀ Conˢ Tyˢ Tmˢ → ▶ᵀ Conˢ Tyˢ → ∀ Uˢ → Elᵀ Conˢ Tyˢ Tmˢ Uˢ → Set₁
Πᵀ Conˢ Tyˢ Tmˢ ▶ˢ Uˢ Elˢ = Tm Πᶜ Πᴿ
  module Πᵀ where
  open Conᵀ
  open Tyᵀ Conˢ
  open Tmᵀ Conˢ Tyˢ
  open ▶ᵀ  Conˢ Tyˢ
  open Uᵀ  Conˢ Tyˢ
  open Elᵀ Conˢ Tyˢ Tmˢ Uˢ
  Π-Γ = Conˢ
  Π-a = Tmˢ [ < Uˢ > ]T
  Π-B = Tyˢ [ ε , coe (ap (Tm _) ([][]T ▪ ap (_ [_]T) εη))
                       (▶ˢ [ wk , Elˢ ]t) ]T
  Πᶜ  = • ▷ Π-Γ ▷ Π-a ▷ Π-B
  Πᴿ  = Tyˢ [ wk² ]T
```

A model supports the universal QIIT: homomorphism

$$
\begin{aligned}
\mathsf{Con}^M &: \mathsf{Con}_1 \to \mathsf{Con}_2 \\
\mathsf{Ty}^M &: \mathsf{Ty}_1\ \Gamma \to \mathsf{Ty}_2\ (\mathsf{Con}^M\ \Gamma) \\
\mathsf{Sub}^M &: \mathsf{Sub}_1\ \Gamma\ \Delta \to \\
&\quad \mathsf{Sub}_2\ (\mathsf{Con}^M\ \Gamma)\ (\mathsf{Con}^M\ \Delta) \\
\mathsf{Tm}^M &: \mathsf{Tm}_1\ \Gamma\ A \to \\
&\quad \mathsf{Tm}_2\ (\mathsf{Con}^M\ \Gamma)\ (\mathsf{Ty}^M\ A) \\
\bullet^M &: \mathsf{Con}^M\ \bullet_1 = \bullet_2 \\
\rhd^M &: \mathsf{Con}^M\ (\Gamma \rhd_1 A) = \\
&\quad (\mathsf{Con}^M\ \Gamma) \rhd_2 (\mathsf{Ty}^M\ A) \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathsf{Con}^M &: \mathsf{Tm}\ (\bullet \rhd \mathsf{Con}_1)\ (\mathsf{Con}_2\ [\epsilon]) \\
\mathsf{Ty}^M &: \mathsf{Tm}\ (\bullet \rhd \mathsf{Con}_1 \rhd \mathsf{Ty}_1)\ (\mathsf{Ty}_2\ [\epsilon, \mathsf{Con}^M\ [\mathsf{wk}^1]]) \\
\mathsf{Sub}^M &: \mathsf{Tm}\ (\bullet \rhd \mathsf{Con}_1 \rhd \mathsf{Con}_1\ [\epsilon] \rhd \mathsf{Sub}_1) \\
&\quad (\mathsf{Sub}_2\ [\epsilon, \mathsf{Con}^M\ [\mathsf{wk}^2], \mathsf{Con}^M\ [\epsilon, \mathsf{v}^1]]) \\
\mathsf{Tm}^M &: \mathsf{Tm}\ (\bullet \rhd \mathsf{Con}_1 \rhd \mathsf{Ty}_1 \rhd \mathsf{Tm}_1) \\
&\quad (\mathsf{Tm}_2\ [\epsilon, \mathsf{Con}^M\ [\mathsf{wk}^2], \mathsf{Ty}^M\ [\mathsf{wk}^1]]) \\
\bullet^M &: \mathsf{Tm}\ \bullet\ (\mathsf{Id}\ (\mathsf{Con}^M\ [\epsilon, \bullet_1])\ \bullet_2) \\
\rhd^M &: \mathsf{Tm}\ (\bullet \rhd \mathsf{Con}_1 \rhd \mathsf{Ty}_1) \\
&\quad (\mathsf{Id}\ (\mathsf{Con}^M\ [\epsilon, \rhd_1]) \\
&\qquad (\rhd_2\ [\epsilon, \mathsf{Con}^M\ [\mathsf{wk}^1], \mathsf{Ty}^M])) \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

The setoid model

The setoid model (i)

$$(\Gamma : \mathsf{Con}_i) :\equiv \begin{cases} |\Gamma| & : \mathsf{Set}_i \\ \Gamma^{\sim} & : |\Gamma| \to |\Gamma| \to \mathsf{Prop}_i \\ \mathsf{refl}_\Gamma & : (\gamma : |\Gamma|) \to \Gamma^{\sim}\ \gamma\ \gamma \\ \mathsf{sym}_\Gamma & : \Gamma^{\sim}\ \gamma_0\ \gamma_1 \to \Gamma^{\sim}\gamma_1\ \gamma_0 \\ \mathsf{trans}_\Gamma & : \Gamma^{\sim}\ \gamma_0\ \gamma_1 \to \Gamma^{\sim}\ \gamma_1\ \gamma_2 \to \Gamma^{\sim}\ \gamma_0\ \gamma_2 \end{cases}$$

The setoid model (ii)

$$(A : \mathsf{Ty}_j\ \Gamma) :\equiv \begin{cases} |A| & : |\Gamma| \to \mathsf{Set}_j \\ A^{\sim} & : \Gamma^{\sim}\ \gamma_0\ \gamma_1 \to |A|\ \gamma_0 \to |A|\ \gamma_1 \to \mathsf{Prop}_j \\ \mathsf{refl}_A & : (a : |A|\ \gamma) \to A^{\sim}\ (\mathsf{refl}_\Gamma\ \gamma)\ a\ a \\ \mathsf{sym}_A & : A^{\sim}\ \gamma_{01}\ a_0\ a_1 \to A^{\sim}\ (\mathsf{sym}_\Gamma\ \gamma_{01})\ a_1\ a_0 \\ \mathsf{trans}_A & : A^{\sim}\ \gamma_{01}\ a_0\ a_1 \to A^{\sim}\ \gamma_{12}\ a_1\ a_2 \to \\ & \quad A^{\sim}\ (\mathsf{trans}_\Gamma\ \gamma_{01}\ \gamma_{12})\ a_0\ a_2 \\ \mathsf{coe}_A & : \Gamma^{\sim}\ \gamma_0\ \gamma_1 \to |A|\ \gamma_0 \to |A|\ \gamma_1 \\ \mathsf{coh}_A & : (\gamma_{01} : \Gamma^{\sim}\ \gamma_0\ \gamma_1) \to (a : |A|\ \gamma_0) \to \\ & \quad A^{\sim}\ \gamma_{01}\ a\ (\mathsf{coe}_A\ \gamma_{01}\ a) \end{cases}$$

$$(t : \mathsf{Tm}\ \Gamma\ A) :\equiv \begin{cases} |t| & : (\gamma : |\Gamma|) \to |A|\ \gamma \\ t^{\sim} & : (\gamma_{01} : \Gamma^{\sim}\ \gamma_0\ \gamma_1) \to A^{\sim}\ \gamma_{01}\ a_0\ a_1 \end{cases}$$

Implementation of the universal QIIT in the setoid model

Implementation IIT (i)

```
data Con  : Set₁
data Ty   : Con → Set₁
data Sub  : Con → Con → Set₁
data Tm   : (Γ : Con) → Ty Γ → Set₁

data Con~ : Con → Con → Prop₁
data Ty~  : ∀ {Γ₀ Γ₁} → Con~ Γ₀ Γ₁ → Ty Γ₀ → Ty Γ₁ → Prop₁
data Sub~ : ∀ {Γ₀ Γ₁} → Con~ Γ₀ Γ₁ → ∀ {Δ₀ Δ₁} → Con~ Δ₀ Δ₁ → Sub Γ₀ Δ₀ → Sub Γ₁ Δ₁ → Prop₁
data Tm~  : ∀ {Γ₀ Γ₁} (Γ₀₁ : Con~ Γ₀ Γ₁) {A₀ A₁} → Ty~ Γ₀₁ A₀ A₁ → Tm Γ₀ A₀ → Tm Γ₁ A₁ → Prop₁

  ⋮

data Ty where
  U      : ∀ {Γ} → Ty Γ
  El     : ∀ {Γ} → Tm Γ U → Ty Γ
  Π      : ∀ {Γ}(a : Tm Γ U) → Ty (Γ ▶ El a) → Ty Γ
  Id     : ∀ {Γ}(a : Tm Γ U)(u v : Tm Γ (El a)) → Ty Γ
  _[_]T  : ∀ {Γ Δ} → Ty Δ → Sub Γ Δ → Ty Γ
  coerce : ∀ {Γ₀ Γ₁} → Con~ Γ₀ Γ₁ → Ty Γ₀ → Ty Γ₁

  ⋮
```

Implementation IIT (ii)

```
data Ty~ where
  rflT  : ∀ {Γ A} → Ty~ {Γ}{Γ} rflC A A
  symT  : ∀ {Γ₀ Γ₁ Γ₀₁ A₀ A₁} → Ty~ {Γ₀}{Γ₁} Γ₀₁ A₀ A₁ → Ty~ (symC Γ₀₁) A₁ A₀
  trsT  : ∀ {Γ₀ Γ₁ Γ₂ Γ₀₁ Γ₁₂}{A₀ A₁ A₂} → Ty~ {Γ₀}{Γ₁} Γ₀₁ A₀ A₁ → Ty~ {Γ₁}{Γ₂} Γ₁₂ A₁ A₂
          → Ty~ (trsC Γ₀₁ Γ₁₂) A₀ A₂
  cohT  : ∀ {Γ₀ Γ₁}(Γ₀₁ : Con~ Γ₀ Γ₁)(A : Ty Γ₀) → Ty~ Γ₀₁ A (coerce Γ₀₁ A)

  U~    : ∀ {Γ₀ Γ₁ Γ₀₁} → Ty~ {Γ₀}{Γ₁} Γ₀₁ U U
  El~   : ∀ {Γ₀ Γ₁ Γ₀₁}{t₀ : Tm Γ₀ U}{t₁ : Tm Γ₁ U} → Tm~ Γ₀₁ U~ t₀ t₁ → Ty~ Γ₀₁ (El t₀) (El t₁)

   ⋮

  U[]   : ∀ {Γ Δ}{σ : Sub Γ Δ} → Ty~ rflC (U [ σ ]T) U
  El[]  : ∀ {Γ Δ}{σ : Sub Γ Δ}{a : Tm Δ U}
          → Ty~ rflC (El a [ σ ]T) (El (coerce rflC U[] ((a [ σ ]))))

   ⋮
```

Constructors

```
Tyˢ : Tyᵀ Conˢ
| Tyˢ |T        _ ,Σ Γˢ    = S.Ty   Γˢ
_T_⊢_~_ Tyˢ (_ ,p Γˢ~) = S.Ty~ Γˢ~
refT Tyˢ _ = S.rflT
symT Tyˢ   = S.symT
transT Tyˢ = S.trsT
coeT Tyˢ (_ ,p Γ~ˢ) = S.coerce Γ~ˢ
cohT Tyˢ (_ ,p Γ~ˢ) = S.cohT   Γ~ˢ

Uˢ : Uᵀ Conˢ Tyˢ
| Uˢ |t _ = S.U
~t Uˢ   _ = S.U~

Elˢ : Elᵀ Conˢ Tyˢ Tmˢ Uˢ
| Elˢ |t (_ ,Σ Aˢ)  = S.El  Aˢ
~t Elˢ   (_ ,p A~ˢ) = S.El~ A~ˢ

U[]ˢ : U[]ᵀ Conˢ Tyˢ Subˢ []Tˢ Uˢ
| U[]ˢ |t _ = liftp S.U[]
~t U[]ˢ = _

El[]ˢ : El[]ᵀ Conˢ Tyˢ Subˢ Tmˢ []Tˢ []ˢ Uˢ Elˢ U[]ˢ
| El[]ˢ |t _ = liftp S.El[]
~t El[]ˢ = _
```

Recursor and uniqueness

The recursor in the empty context can be defined by recursion over the IIT

The recursor can be lifted to any context using a Π type where the domain is the context

Substitution laws and uniqueness of the recursor are proved by induction over the IIT

Agda still has not finished type checking the proof of uniqueness

Conclusion

Conclusion

A QIIT is a context in the universal QIIT

All QIITs can be reduced to the universal QIIT

We showed that the setoid model of type theory supports the universal QIIT

Future work

Equalities of sorts

Reduction rules of arbitrary QIITs constructed from the universal QIIT.