Second-order generalised algebraic theories

signatures and first-order semantics

Ambrus Kaposi **Szumi Xie**[1]

Eötvös Loránd University, Budapest

FSCD 2024, Tallinn

[1]This talk is funded by COST Action EuroProofNet, supported by COST (European Cooperation in Science and Technology, `www.cost.eu`)

Overview

Examples of SOGATs

SOGAT → GAT translation

The theory of SOGAT signatures

Summary

Examples of SOGATs

Untyped lambda calculus

$$\frac{x \in \Gamma}{\Gamma \vdash x} \text{(var)}$$

$$\frac{\Gamma \vdash t \qquad \Gamma \vdash u}{\Gamma \vdash t \cdot u} \text{(app)} \qquad \frac{\Gamma, x \vdash t}{\Gamma \vdash \mathrm{lam}\, x.\, t} \text{(lam)}$$

$$\frac{\Gamma, x \vdash t \qquad \Gamma \vdash u}{\Gamma \vdash (\mathrm{lam}\, x.\, t) \cdot u = t\,[u / x]} (\beta)$$

$$\frac{\Gamma \vdash t = t' \qquad \Gamma \vdash u = u'}{\Gamma \vdash t \cdot u = t' \cdot u'} \qquad \frac{\Gamma, x \vdash t = t'}{\Gamma \vdash \mathrm{lam}\, x.\, t = \mathrm{lam}\, x.\, t'}$$

Untyped lambda calculus

$$\frac{t \qquad u}{t \cdot u}\ (\mathrm{app}) \qquad \frac{x \vdash t}{\mathrm{lam}\, x.\, t}\ (\mathrm{lam})$$

$$\frac{x \vdash t \qquad u}{(\mathrm{lam}\, x.\, t) \cdot u = t\,[u\,/\,x]}\ (\beta)$$

Untyped lambda calculus

$$\frac{t : \mathrm{Tm} \qquad u : \mathrm{Tm}}{t \cdot u : \mathrm{Tm}}\ (\mathrm{app}) \qquad\qquad \frac{t : \mathrm{Tm} \to \mathrm{Tm}}{\mathrm{lam}\ t : \mathrm{Tm}}\ (\mathrm{lam})$$

$$\frac{t : \mathrm{Tm} \to \mathrm{Tm} \qquad u : \mathrm{Tm}}{(\mathrm{lam}\ t) \cdot u = t\ u}\ (\beta)$$

Untyped lambda calculus

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{Tm} && : \mathrm{Sort} \\
&- \cdot - && : \mathrm{Tm} \to \mathrm{Tm} \to \mathrm{Tm} \\
&\mathrm{lam} && : (\mathrm{Tm} \to \mathrm{Tm}) \to \mathrm{Tm} \\
&\beta && : (t : \mathrm{Tm} \to \mathrm{Tm}) \to (u : \mathrm{Tm}) \to (\mathrm{lam}\ t) \cdot u = t\ u
\end{aligned}
$$

$$\mathrm{lam}\ (\lambda f.\ \mathrm{lam}\ (\lambda x.\ f \cdot (f \cdot x))) : \mathrm{Tm}$$

Simply typed lambda calculus

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Ty} &: \mathrm{Sort} \\
\iota &: \mathrm{Ty} \\
- \Rightarrow - &: \mathrm{Ty} \to \mathrm{Ty} \to \mathrm{Ty}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Tm} &: \mathrm{Ty} \to \mathrm{Sort} \\
- \cdot - &: \mathrm{Tm}\,(A \Rightarrow B) \to \mathrm{Tm}\,A \to \mathrm{Tm}\,B \\
\mathrm{lam} &: (\mathrm{Tm}\,A \to \mathrm{Tm}\,B) \to \mathrm{Tm}\,(A \Rightarrow B) \\
\beta &: (t : \mathrm{Tm}\,A \to \mathrm{Tm}\,B) \to (u : \mathrm{Tm}\,A) \to (\mathrm{lam}\,t) \cdot u = t\,u
\end{aligned}
$$

$$
\mathrm{lam}\,(\lambda f.\,\mathrm{lam}\,(\lambda x.\,f \cdot (f \cdot x))) : \mathrm{Tm}\,\big((\iota \Rightarrow \iota) \Rightarrow (\iota \Rightarrow \iota)\big)
$$

Minimalistic first-order logic

$$
\begin{aligned}
\mathsf{Tm} &: \mathsf{Sort} \\
\mathsf{For} &: \mathsf{Sort} \\
- \supset - &: \mathsf{For} \to \mathsf{For} \to \mathsf{For} \\
\forall &: (\mathsf{Tm} \to \mathsf{For}) \to \mathsf{For} \\
\mathsf{Eq} &: \mathsf{Tm} \to \mathsf{Tm} \to \mathsf{For}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathsf{Pf} &: \mathsf{For} \to \mathsf{Sort} \\
\mathsf{irrel} &: (u : \mathsf{Pf}\,A) \to (v : \mathsf{Pf}\,A) \to u = v \\
\supset_{\mathsf{intro}} &: (\mathsf{Pf}\,A \to \mathsf{Pf}\,B) \leftrightarrow \mathsf{Pf}\,(A \supset B) : \supset_{\mathsf{elim}} \\
\forall_{\mathsf{intro}} &: \big((t : \mathsf{Tm}) \to \mathsf{Pf}\,(A\,t)\big) \leftrightarrow \mathsf{Pf}\,(\forall\,A) : \forall_{\mathsf{elim}}
\end{aligned}
$$

$$
\forall\,(\lambda x.\,\forall\,(\lambda y.\,\mathsf{Eq}\,x\,y \supset \mathsf{Eq}\,y\,x)) : \mathsf{For}
$$

System F

$$
\begin{aligned}
\mathsf{Ty} &: \mathsf{Sort} \\
\mathsf{Tm} &: \mathsf{Ty} \to \mathsf{Sort} \\[0.5em]
- \Rightarrow - &: \mathsf{Ty} \to \mathsf{Ty} \to \mathsf{Ty} \\
\mathsf{lam} &: (\mathsf{Tm}\ A \to \mathsf{Tm}\ B) \cong \mathsf{Tm}\ (A \Rightarrow B) : \mathsf{app} \\[0.5em]
\forall &: (\mathsf{Ty} \to \mathsf{Ty}) \to \mathsf{Ty} \\
\mathsf{Lam} &: \big((A : \mathsf{Ty}) \to \mathsf{Tm}\ (F\ A)\big) \cong \mathsf{Tm}\ (\forall\ F) : \mathsf{App}
\end{aligned}
$$

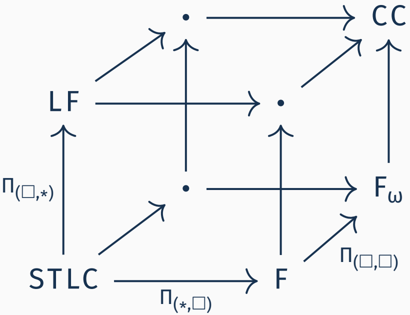
$$
\mathsf{Lam}\ (\lambda A.\ \mathsf{lam}\ (\lambda x.\ \ x)) : \mathsf{Tm}\ (\forall\ (\lambda A.\ A \Rightarrow A))
$$

Calculus of constructions and the lambda cube

$$
\begin{aligned}
\Box &: \mathrm{Sort} \\
* &: \Box \\
\mathrm{Ty} &: \Box \to \mathrm{Sort} \\
\mathrm{Tm} &: \mathrm{Ty}\ * \to \mathrm{Sort}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\Pi_{(*,*)} &: (A : \mathrm{Ty}\ *) \to (\mathrm{Tm}\ A \to \mathrm{Ty}\ *) \to \mathrm{Ty}\ * \\
\Pi_{(\Box,*)} &: (K : \Box) \to (\mathrm{Ty}\ K \to \mathrm{Ty}\ *) \to \mathrm{Ty}\ * \\
\Pi_{(\Box,\Box)} &: (K : \Box) \to (\mathrm{Ty}\ K \to \Box) \to \Box \\
\Pi_{(*,\Box)} &: (A : \mathrm{Ty}\ *) \to (\mathrm{Tm}\ A \to \Box) \to \Box
\end{aligned}
$$

+ universal properties



Minimalistic Martin-Löf type theory

$$
\begin{aligned}
\mathsf{Ty} &: \mathbb{N} \to \mathsf{Sort} \\
\mathsf{Tm} &: \mathsf{Ty}\ i \to \mathsf{Sort} \\
\mathsf{U} &: (i : \mathbb{N}) \to \mathsf{Ty}\ (i+1) \\
\mathsf{c} &: \mathsf{Ty}\ i \cong \mathsf{Tm}\ (\mathsf{U}\ i) : \mathsf{El} \\
\Pi &: (A : \mathsf{Ty}\ i) \to (\mathsf{Tm}\ A \to \mathsf{Ty}\ i) \to \mathsf{Ty}\ i \\
\mathsf{lam} &: \big((a : \mathsf{Tm}\ A) \to \mathsf{Tm}\ (B\ a)\big) \cong \mathsf{Tm}\ (\Pi\ A\ B) : \mathsf{app} \\
\mathsf{Lift} &: \mathsf{Ty}\ i \to \mathsf{Ty}\ (i+1) \\
\mathsf{lift} &: \mathsf{Tm}\ A \cong \mathsf{Tm}\ (\mathsf{Lift}\ A) : \mathsf{unlift}
\end{aligned}
$$

SOGAT → GAT translation

Second-order models?

Model:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Tm} &: \mathrm{Set} \\
\mathrm{app} &: \mathrm{Tm} \to \mathrm{Tm} \to \mathrm{Tm} \\
\mathrm{lam} &: (\mathrm{Tm} \to \mathrm{Tm}) \to \mathrm{Tm} \\
\beta &: \mathrm{app}\ (\mathrm{lam}\ t)\ u = t\ u
\end{aligned}
$$

Second-order models?

Model:

$$\begin{aligned} \mathsf{Tm} &: \mathsf{Set} \\ \mathsf{app} &: \mathsf{Tm} \to \mathsf{Tm} \to \mathsf{Tm} \\ \mathsf{lam} &: (\mathsf{Tm} \to \mathsf{Tm}) \to \mathsf{Tm} \\ \beta &: \mathsf{app}\,(\mathsf{lam}\,t)\,u = t\,u \end{aligned}$$

Homomorphism:

$$\begin{aligned} &f : \mathsf{Tm}_A \to \mathsf{Tm}_B \\ &f\,(\mathsf{app}_A\,t\,u) = \mathsf{app}_B\,(f\,t)\,(f\,u) \\ &f\,(\mathsf{lam}_A\,t) = \mathsf{lam}_B\,(\lambda x.\,f\,(t\,?)) \end{aligned}$$

$$t : \mathsf{Tm}_A \to \mathsf{Tm}_A \qquad x : \mathsf{Tm}_B$$

Untyped lambda calculus – translation

SOGAT	GAT	
	$\mathsf{Con} : \mathsf{Sort}$	Category
	$\mathsf{Sub} : \mathsf{Con} \to \mathsf{Con} \to \mathsf{Sort}$	
	$\diamond : \mathsf{Con}$	Terminal object

Untyped lambda calculus – translation

SOGAT	GAT
	$\mathsf{Con}, \mathsf{Sub}, \diamond \quad : \text{Category with terminal object}$
$\mathsf{Tm} \quad : \mathsf{Sort}$	$\mathsf{Tm} \quad : \mathsf{Con} \to \mathsf{Sort}$
	$-[-] \quad : \mathsf{Tm}\,\Gamma \to \mathsf{Sub}\,\Delta\,\Gamma \to \mathsf{Tm}\,\Delta \quad \text{(functorial)}$
	$- \triangleright \quad : \mathsf{Con} \to \mathsf{Con}$
	$-,- \quad : \mathsf{Sub}\,\Delta\,\Gamma \times \mathsf{Tm}\,\Delta \cong \mathsf{Sub}\,\Delta\,(\Gamma \triangleright) : (\mathsf{p}, \mathsf{q})$

Untyped lambda calculus – translation

SOGAT		GAT	
		$\mathsf{Con}, \mathsf{Sub}, \diamond$	: Category with terminal object
Tm	$: \mathsf{Sort}$	Tm	$: \mathsf{Con} \to \mathsf{Sort}$
		$-[-]$	$: \mathsf{Tm}\,\Gamma \to \mathsf{Sub}\,\Delta\,\Gamma \to \mathsf{Tm}\,\Delta$ (functorial)
		$- \triangleright$	$: \mathsf{Con} \to \mathsf{Con}$
		$-,-$	$: \mathsf{Sub}\,\Delta\,\Gamma \times \mathsf{Tm}\,\Delta \cong \mathsf{Sub}\,\Delta\,(\Gamma \triangleright) : (\mathsf{p}, \mathsf{q})$
app	$: \mathsf{Tm} \to \mathsf{Tm} \to \mathsf{Tm}$	app	$: \mathsf{Tm}\,\Gamma \to \mathsf{Tm}\,\Gamma \to \mathsf{Tm}\,\Gamma$
		$\mathsf{app}[]$	$: (\mathsf{app}\,t\,u)[\sigma] = \mathsf{app}\,(t[\sigma])\,(u[\sigma])$
lam	$: (\mathsf{Tm} \to \mathsf{Tm}) \to \mathsf{Tm}$	lam	$: \mathsf{Tm}\,(\Gamma \triangleright) \to \mathsf{Tm}\,\Gamma$
		$\mathsf{lam}[]$	$: (\mathsf{lam}\,t)[\sigma] = \mathsf{lam}\,(t[\sigma \circ \mathsf{p}, \mathsf{q}])$
β	$: \mathsf{app}\,(\mathsf{lam}\,t)\,u = t\,u$	β	$: \mathsf{app}\,(\mathsf{lam}\,t)\,u = t[\mathsf{id}, u]$

Untyped lambda calculus – translation

SOGAT	GAT	
	$\mathsf{Con}, \mathsf{Sub}, \diamond$	: Category with terminal object
$\mathsf{Tm} : \mathsf{Sort}$	Tm	$: \mathsf{Con} \to \mathsf{Sort}$
	$-[-]$	$: \mathsf{Tm}\,\Gamma \to \mathsf{Sub}\,\Delta\,\Gamma \to \mathsf{Tm}\,\Delta$ (functorial)
	$- \triangleright$	$: \mathsf{Con} \to \mathsf{Con}$
	$-,-$	$: \mathsf{Sub}\,\Delta\,\Gamma \times \mathsf{Tm}\,\Delta \cong \mathsf{Sub}\,\Delta\,(\Gamma \triangleright) : (\mathsf{p}, \mathsf{q})$
$\mathsf{app} : \mathsf{Tm} \to \mathsf{Tm} \to \mathsf{Tm}$	app	$: \mathsf{Tm}\,\Gamma \to \mathsf{Tm}\,\Gamma \to \mathsf{Tm}\,\Gamma$ (+ subst. rule)
$\mathsf{lam} : (\mathsf{Tm} \to \mathsf{Tm}) \to \mathsf{Tm}$	lam	$: \mathsf{Tm}\,(\Gamma \triangleright) \to \mathsf{Tm}\,\Gamma$ (+ subst. rule)

SOGAT: $\mathsf{lam}\,\big(\lambda f.\,\mathsf{lam}\,\big(\lambda x.\,\mathsf{app}\,f\,(\mathsf{app}\,f\,x)\big)\big) : \mathsf{Tm}$

GAT: $\mathsf{lam}\,\big(\mathsf{lam}\,\big(\mathsf{app}\,(\mathsf{q}\,[\mathsf{p}])\,(\mathsf{app}\,(\mathsf{q}\,[\mathsf{p}])\,\mathsf{q})\big)\big) : \mathsf{Tm}\,\diamond$

Untyped lambda calculus – translation

SOGAT	GAT
	$\mathcal{C}$: Category with terminal object
$\mathsf{Tm} : \mathsf{Sort}$	$\mathsf{Tm} : \mathsf{LocRepPsh}(\mathcal{C})$
$\mathsf{app} : \mathsf{Tm} \to \mathsf{Tm} \to \mathsf{Tm}$	$\mathsf{app} : \mathsf{Tm} \times \mathsf{Tm} \Rightarrow \mathsf{Tm}$
$\mathsf{lam} : (\mathsf{Tm} \to \mathsf{Tm}) \to \mathsf{Tm}$	$\mathsf{lam} : (\mathsf{Tm} \Rightarrow^{+} \mathsf{Tm}) \Rightarrow \mathsf{Tm}$

System F – translation

SOGAT	GAT
	$\mathsf{Con}, \mathsf{Sub}, \diamond \;:\; \text{Category with terminal object}$
$\mathsf{Ty} \;:\; \mathsf{Sort}$	$\mathsf{Ty} \;:\; \mathsf{Con} \to \mathsf{Sort}$
	$- \rhd_{\mathsf{Ty}} \;:\; \mathsf{Con} \to \mathsf{Con}$
$\mathsf{Tm} \;:\; \mathsf{Ty} \to \mathsf{Sort}$	$\mathsf{Tm} \;:\; (\Gamma : \mathsf{Con}) \to \mathsf{Ty}\,\Gamma \to \mathsf{Sort}$
	$- \rhd_{\mathsf{Tm}} - \;:\; (\Gamma : \mathsf{Con}) \to \mathsf{Ty}\,\Gamma \to \mathsf{Con}$

$$\diamond \rhd_{\mathsf{Ty}} \rhd_{\mathsf{Tm}} A \rhd_{\mathsf{Ty}} \rhd_{\mathsf{Tm}} B \;:\; \mathsf{Con}$$

System F – translation

SOGAT	GAT
	$\mathsf{Con}, \mathsf{Sub}, \diamond$: Category with terminal object
$\mathsf{Ty} : \mathsf{Sort}^{+}$	$\mathsf{Ty} : \mathsf{Con} \to \mathsf{Sort}$ $- \triangleright_{\mathsf{Ty}} : \mathsf{Con} \to \mathsf{Con}$
$\mathsf{Tm} : \mathsf{Ty} \to \mathsf{Sort}^{+}$	$\mathsf{Tm} : (\Gamma : \mathsf{Con}) \to \mathsf{Ty}\,\Gamma \to \mathsf{Sort}$ $- \triangleright_{\mathsf{Tm}} - : (\Gamma : \mathsf{Con}) \to \mathsf{Ty}\,\Gamma \to \mathsf{Con}$

$$\diamond \triangleright_{\mathsf{Ty}} \triangleright_{\mathsf{Tm}} A \triangleright_{\mathsf{Ty}} \triangleright_{\mathsf{Tm}} B : \mathsf{Con}$$

Dependent type theory – translation

SOGAT	GAT
	$\mathsf{Con}, \mathsf{Sub}, \diamond \;:\;$ Category with terminal object
$\mathsf{Ty} \;:\; \mathsf{Sort}$	$\mathsf{Ty} \;:\; \mathsf{Con} \to \mathsf{Sort}$
$\mathsf{Tm} \;:\; \mathsf{Ty} \to \mathsf{Sort}^{+}$	$\mathsf{Tm} \;:\; (\Gamma : \mathsf{Con}) \to \mathsf{Ty}\,\Gamma \to \mathsf{Sort}$
	$- \triangleright - \;:\; (\Gamma : \mathsf{Con}) \to \mathsf{Ty}\,\Gamma \to \mathsf{Con}$

Dependent type theory – translation

SOGAT	GAT
	$\mathsf{Con}, \mathsf{Sub}, \diamond \ :\ \mathsf{Category}$
$\mathsf{Ty} \ :\ \mathsf{Sort}$	$\mathsf{Ty}, \mathsf{Tm}, - \triangleright - \ :\ \text{with families}$
$\mathsf{Tm} \ :\ \mathsf{Ty} \to \mathsf{Sort}^{+}$	

The theory of SOGAT signatures

The SOGAT of GATs

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Ty} &: \mathrm{Sort} \\
\mathrm{Tm} &: \mathrm{Ty} \to \mathrm{Sort}^{+} \\
\Sigma &: (A : \mathrm{Ty}) \to (\mathrm{Tm}\ A \to \mathrm{Ty}) \to \mathrm{Ty} \quad (+\beta, \eta) \\
\mathrm{U} &: \mathrm{Ty} \\
\mathrm{El} &: \mathrm{Tm}\ \mathrm{U} \to \mathrm{Ty} \\
\Pi &: (a : \mathrm{Tm}\ \mathrm{U}) \to (\mathrm{Tm}\ (\mathrm{El}\ a) \to \mathrm{Ty}) \to \mathrm{Ty} \quad (+\beta, \eta) \\
\mathrm{Eq} &: (A : \mathrm{Ty}) \to \mathrm{Tm}\ A \to \mathrm{Tm}\ A \to \mathrm{Ty}
\end{aligned}
$$

The SOGAT of SOGATs

$$
\begin{aligned}
\mathsf{Ty} &: \mathsf{Sort} \\
\mathsf{Tm} &: \mathsf{Ty} \to \mathsf{Sort}^+ \\
\Sigma &: (A : \mathsf{Ty}) \to (\mathsf{Tm}\, A \to \mathsf{Ty}) \to \mathsf{Ty} \quad (+\beta, \eta) \\
\mathsf{U} &: \mathsf{Ty} \\
\mathsf{El} &: \mathsf{Tm}\, \mathsf{U} \to \mathsf{Ty} \\
\Pi &: (a : \mathsf{Tm}\, \mathsf{U}) \to (\mathsf{Tm}\, (\mathsf{El}\, a) \to \mathsf{Ty}) \to \mathsf{Ty} \quad (+\beta, \eta) \\
\mathsf{Eq} &: (A : \mathsf{Ty}) \to \mathsf{Tm}\, A \to \mathsf{Tm}\, A \to \mathsf{Ty}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathsf{U}^+ &: \mathsf{Ty} \\
\mathsf{el}^+ &: \mathsf{Tm}\, \mathsf{U}^+ \to \mathsf{Tm}\, \mathsf{U} \\
\pi^+ &: (a : \mathsf{Tm}\, \mathsf{U}^+) \to (\mathsf{Tm}\, (\mathsf{El}\, (\mathsf{el}^+\, a)) \to \mathsf{Tm}\, \mathsf{U}) \to \mathsf{Tm}\, \mathsf{U} \quad (+\beta, \eta)
\end{aligned}
$$

Untyped lambda calculus – signature

$$\begin{aligned}
\mathsf{Tm} &: \mathsf{Sort}^+ \\
\mathsf{lam} &: (\mathsf{Tm} \to \mathsf{Tm}) \to \mathsf{Tm} \\
\mathsf{app} &: \mathsf{Tm} \to \mathsf{Tm} \to \mathsf{Tm}
\end{aligned}$$

$$\Sigma\, \mathsf{U}^+ \Big(\lambda \mathit{Tm}.\ \Big(\big(\underbrace{\mathit{Tm}}_{\mathsf{U}^+} \Rightarrow^+ \underbrace{\mathsf{el}^+\ \mathit{Tm}}_{\mathsf{U}}\big) \Rightarrow \underbrace{\mathsf{El}\,(\mathsf{el}^+\ \mathit{Tm})}_{\mathsf{Ty}}\Big) \times \big(\underbrace{\mathsf{el}^+\ \mathit{Tm}}_{\mathsf{U}} \Rightarrow \underbrace{\mathsf{el}^+\ \mathit{Tm}}_{\mathsf{U}} \Rightarrow \underbrace{\mathsf{El}\,(\mathsf{el}^+\ \mathit{Tm})}_{\mathsf{Ty}}\big)\Big)$$

Different ways to define app

$$\mathsf{app} : \mathsf{Tm} \to \mathsf{Tm} \to \mathsf{Tm}$$

$\mathsf{el}^{+}\ \mathsf{Tm} \Rightarrow \mathsf{el}^{+}\ \mathsf{Tm} \Rightarrow \mathsf{El}\,(\mathsf{el}^{+}\ \mathsf{Tm})$	$\mathsf{Tm}\ \Gamma\ (A \Rightarrow B) \to \mathsf{Tm}\ \Gamma\ A \to \mathsf{Tm}\ \Gamma\ B$
$\mathsf{el}^{+}\ \mathsf{Tm} \Rightarrow \mathsf{El}\,(\mathsf{Tm} \Rightarrow^{+}\ (\mathsf{el}^{+}\ \mathsf{Tm}))$	$\mathsf{Tm}\ \Gamma\ (A \Rightarrow B) \to \mathsf{Tm}\ (\Gamma \triangleright A)\ B$
$\mathsf{El}\,(\mathsf{Tm} \Rightarrow^{+} \mathsf{Tm} \Rightarrow^{+}\ (\mathsf{el}^{+}\ \mathsf{Tm}))$	$\mathsf{Tm}\ (\Gamma \triangleright (A \Rightarrow B) \triangleright A)$

Translation details

SOGAT signature → GAT signature

Algorithm implemented in Agda

Computes curried signatures without Yoneda overhead

$$\begin{aligned}\mathsf{app} &: \mathsf{Sub}\ \Gamma\ \diamond \times \mathsf{Tm}\ \Gamma \to \\ &\qquad ((\Delta : \mathsf{Con}) \to \mathsf{Sub}\ \Delta\ \Gamma \times \mathsf{Tm}\ \Delta \to \mathsf{Tm}\ \Delta) \times \mathsf{naturality}\end{aligned}$$

$$\mathsf{app} : \mathbb{1} \times \mathsf{Tm}\ \Gamma \times \mathsf{Tm}\ \Gamma \to \mathsf{Tm}\ \Gamma$$

$$\mathsf{app} : \mathsf{Tm}\ \Gamma \to \mathsf{Tm}\ \Gamma \to \mathsf{Tm}\ \Gamma$$

Extensions and variation

Support for parametrized/open signatures and infinitary operations by adding new type formers:

$$\hat{\Pi} : (A : \mathsf{Set}^{\circ}) \to (A \to \mathsf{Ty}) \to \mathsf{Ty}$$
$$\tilde{\pi} : (A : \mathsf{Set}^{\circ}) \to (A \to \mathsf{Tm}\ \mathsf{U}) \to \mathsf{Tm}\ \mathsf{U}$$

Alternative semantics using single substitution calculus:

$$\mathsf{p},\ \langle - \rangle,\ -\uparrow$$

Related to (Ehrhard 1988)

Summary

Summary

Structural languages with bindings are SOGATs

Not SOGAT, but GAT:

- linear logic
- modal languages
- no substitution under lambda

Not even GAT: small-step operational semantics

Summary

Languages can be specified without separate scoping, typing, conversion relations, and without resorting to De Bruijn indices

- Higher-order abstract syntax (Hofmann 1999)
- Equational logical framework (Harper 2021)
- Representable map category (Uemura 2021)
- Two-level type theory (Annenkov et al. 2023)

SOGATs can be translated to GATs to obtain nice metatheory