Second-order generalized algebraic theories

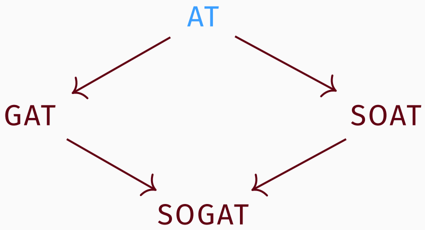
Szumi Xie
Joint work with Ambrus Kaposi
Eötvös Loránd University (ELTE)

7th World Logic Day, Budapest, 2025

Overview

Examples of (SO)(G)ATs

Algebraic theories



Algebraic theory – monoids

M is a set

$- \cdot - : M \times M \to M$

$\varepsilon \in M$

for all $x, y, z \in M$, $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$

for all $x \in M$, $\varepsilon \cdot x = x$

for all $x \in M$, $x \cdot \varepsilon = x$

Algebraic theory – monoids

$$
\begin{aligned}
\mathsf{M} &: \mathsf{Set} \\
\_\cdot\_ &: \mathsf{M} \to \mathsf{M} \to \mathsf{M} \\
\varepsilon &: \mathsf{M} \\
\mathsf{assoc} &: (x, y, z : \mathsf{M}) \to (x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z) \\
\mathsf{idl} &: (x : \mathsf{M}) \to \varepsilon \cdot x = x \\
\mathsf{idr} &: (x : \mathsf{M}) \to x \cdot \varepsilon = x
\end{aligned}
$$

Algebraic theory – combinator calculus

$$
\begin{aligned}
\mathsf{Tm} &: \mathsf{Set} \\
- \cdot - &: \mathsf{Tm} \to \mathsf{Tm} \to \mathsf{Tm} \\
\mathsf{K} &: \mathsf{Tm} \\
\mathsf{S} &: \mathsf{Tm} \\
\mathsf{K}\beta &: (\mathsf{K} \cdot x) \cdot y = x \\
\mathsf{S}\beta &: ((\mathsf{S} \cdot x) \cdot y) \cdot z = (x \cdot z) \cdot (y \cdot z)
\end{aligned}
$$

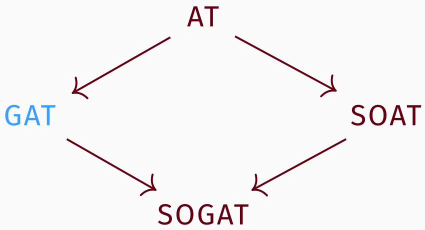
Algebraic theory – Boolean algebras

$$
\begin{aligned}
A &: \mathrm{Set} \\
1 &: A \\
0 &: A \\
\neg - &: A \to A \\
- \wedge - &: A \to A \to A \\
- \vee - &: A \to A \to A
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(x \wedge y) \wedge z &= x \wedge (y \wedge z) \\
x \wedge y &= y \wedge x \\
x \wedge x &= x \\
1 \wedge x &= x \\
0 \wedge x &= 0 \\
(x \vee y) \wedge z &= (x \wedge z) \vee (y \wedge z) \\
(x \vee y) \wedge y &= y
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\neg 1 &= 0 \\
\neg 0 &= 1 \\
\neg\neg x &= x \\
\neg(x \wedge y) &= \neg x \vee \neg y \\
\neg(x \vee y) &= \neg x \wedge \neg y \\
x \wedge \neg x &= 0
\end{aligned}
$$

Generalized algebraic theories



GAT – graphs

$$
\begin{aligned}
V &: \mathsf{Set} \\
E &: V \to V \to \mathsf{Set}
\end{aligned}
$$

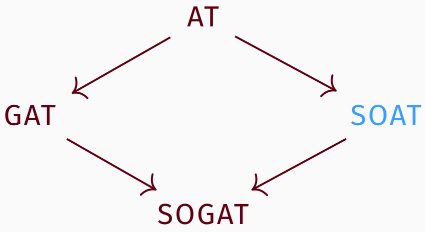
GAT – categories

$$
\begin{aligned}
\mathsf{Ob} &: \mathsf{Set} \\
\mathsf{Hom} &: \mathsf{Ob} \to \mathsf{Ob} \to \mathsf{Set} \\
- \circ - &: \mathsf{Hom}\; B\; C \to \mathsf{Hom}\; A\; B \to \mathsf{Hom}\; A\; C \\
\mathsf{id} &: \mathsf{Hom}\; A\; A \\
\mathsf{assoc} &: (f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h) \\
\mathsf{idl} &: \mathsf{id} \circ f = f \\
\mathsf{idr} &: f \circ \mathsf{id} = f
\end{aligned}
$$

GAT – minimalistic combinatory logic

$$
\begin{aligned}
\mathsf{For} &: \mathsf{Set} \\
- \Rightarrow - &: \mathsf{For} \to \mathsf{For} \to \mathsf{For} \\
\mathsf{Pf} &: \mathsf{For} \to \mathsf{Set} \\
\mathsf{MP} &: \mathsf{Pf}\,(A \Rightarrow B) \to \mathsf{Pf}\,A \to \mathsf{Pf}\,B \\
\mathsf{Ax1} &: \mathsf{Pf}\,(A \Rightarrow B \Rightarrow A) \\
\mathsf{Ax2} &: \mathsf{Pf}\,\big((A \Rightarrow B \Rightarrow C) \Rightarrow (A \Rightarrow B) \Rightarrow (A \Rightarrow C)\big)
\end{aligned}
$$

Second-order algebraic theories



SOAT – lambda calculus

$$\begin{aligned}
\mathsf{Tm} &: \mathsf{Set} \\
- \cdot - &: \mathsf{Tm} \to \mathsf{Tm} \to \mathsf{Tm} \\
\mathsf{lam} &: (\mathsf{Tm} \to \mathsf{Tm}) \to \mathsf{Tm} \\
\beta &: (\mathsf{lam}\ t) \cdot u = t\ u
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\lambda x.\ x) &: \mathsf{Tm} \to \mathsf{Tm} \\
\mathsf{lam}\ (\lambda x.\ x) &: \mathsf{Tm}
\end{aligned}$$

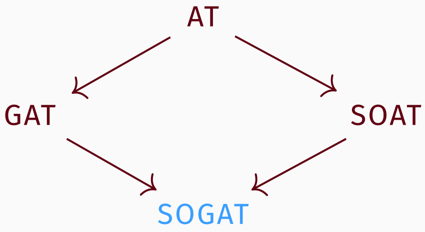
$$\mathsf{lam}\ (\lambda f.\ \mathsf{lam}\ (\lambda x.\ f \cdot (f \cdot x))) : \mathsf{Tm}$$

SOAT – formulas of first-order logic

$$
\begin{aligned}
\mathsf{Tm} &: \mathsf{Set} \\
\mathsf{For} &: \mathsf{Set} \\
\top &: \mathsf{For} \\
\bot &: \mathsf{For} \\
\neg\!- &: \mathsf{For} \to \mathsf{For} \\
- \wedge - &: \mathsf{For} \to \mathsf{For} \to \mathsf{For} \\
- \vee - &: \mathsf{For} \to \mathsf{For} \to \mathsf{For} \\
- \Rightarrow - &: \mathsf{For} \to \mathsf{For} \to \mathsf{For} \\
\forall &: (\mathsf{Tm} \to \mathsf{For}) \to \mathsf{For} \\
\exists &: (\mathsf{Tm} \to \mathsf{For}) \to \mathsf{For} \\
\mathsf{Eq} &: \mathsf{Tm} \to \mathsf{Tm} \to \mathsf{For}
\end{aligned}
$$

$$\forall\,(\lambda x.\,\forall\,(\lambda y.\,\mathsf{Eq}\;x\;y \Rightarrow \mathsf{Eq}\;y\;x)) : \mathsf{For}$$

Second-order generalized algebraic theories



SOGAT – minimalistic propositional logic

$$
\begin{aligned}
\mathsf{For} &: \mathsf{Set} \\
- \Rightarrow - &: \mathsf{For} \to \mathsf{For} \to \mathsf{For} \\[1ex]
\mathsf{Pf} &: \mathsf{For} \to \mathsf{Set} \\
\Rightarrow_{\mathsf{elim}} &: \mathsf{Pf}\,(A \Rightarrow B) \to \mathsf{Pf}\,A \to \mathsf{Pf}\,B \\
\Rightarrow_{\mathsf{intro}} &: (\mathsf{Pf}\,A \to \mathsf{Pf}\,B) \to \mathsf{Pf}\,(A \Rightarrow B)
\end{aligned}
$$

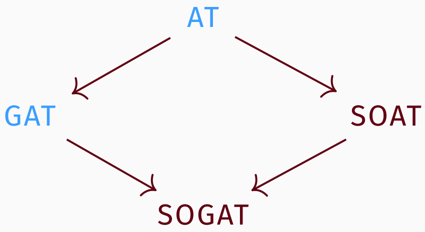
SOGAT – minimalistic first-order logic

$$
\begin{aligned}
\mathsf{Tm} &: \mathsf{Set} \\
\mathsf{For} &: \mathsf{Set} \\
- \Rightarrow - &: \mathsf{For} \to \mathsf{For} \to \mathsf{For} \\
\forall &: (\mathsf{Tm} \to \mathsf{For}) \to \mathsf{For} \\
\mathsf{Eq} &: \mathsf{Tm} \to \mathsf{Tm} \to \mathsf{For}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathsf{Pf} &: \mathsf{For} \to \mathsf{Set} \\
\Rightarrow_{\mathsf{intro}} &: (\mathsf{Pf}\, A \to \mathsf{Pf}\, B) \leftrightarrow \mathsf{Pf}\,(A \Rightarrow B) : \Rightarrow_{\mathsf{elim}} \\
\forall_{\mathsf{intro}} &: \big((t : \mathsf{Tm}) \to \mathsf{Pf}\,(A\, t)\big) \leftrightarrow \mathsf{Pf}\,(\forall\, A) : \forall_{\mathsf{elim}}
\end{aligned}
$$

SOGAT → GAT translation

GATs are nice



Algebras form a complete & cocomplete category

Initial algebra is the syntax

Second-order models?

Model:

$$
\begin{aligned}
\mathsf{Tm} &: \mathsf{Set} \\
- \cdot - &: \mathsf{Tm} \to \mathsf{Tm} \to \mathsf{Tm} \\
\mathsf{lam} &: (\mathsf{Tm} \to \mathsf{Tm}) \to \mathsf{Tm} \\
\beta &: (\mathsf{lam}\ t) \cdot u = t\ u
\end{aligned}
$$

Second-order models?

Model:

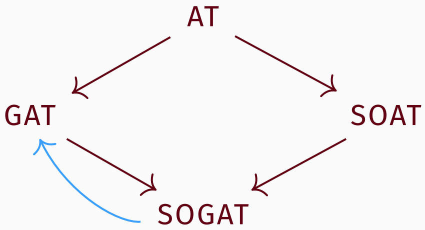
$$
\begin{aligned}
\mathsf{Tm} &: \mathsf{Set} \\
- \cdot - &: \mathsf{Tm} \to \mathsf{Tm} \to \mathsf{Tm} \\
\mathsf{lam} &: (\mathsf{Tm} \to \mathsf{Tm}) \to \mathsf{Tm} \\
\beta &: (\mathsf{lam}\ t) \cdot u = t\ u
\end{aligned}
$$

Homomorphism:

$$
\begin{aligned}
f &: \mathsf{Tm}_A \to \mathsf{Tm}_B \\
f\,(t \cdot_A u) &= (f\ t) \cdot_B (f\ u) \\
f\,(\mathsf{lam}_A\ t) &= \mathsf{lam}_B\ (\lambda x.\ f\ (t\ ?))
\end{aligned}
$$

$$
t : \mathsf{Tm}_A \to \mathsf{Tm}_A \qquad x : \mathsf{Tm}_B
$$

SOGAT → GAT translation



SOGAT → GAT translation – propositional logic

SOGAT	GAT
For, $- \Rightarrow -$	
$\mathsf{Pf} : \mathsf{For} \to \mathsf{Set}$	
$\Rightarrow_{\mathsf{elim}} : \mathsf{Pf}\,(A \Rightarrow B) \to \mathsf{Pf}\,A \to \mathsf{Pf}\,B$	
$\Rightarrow_{\mathsf{intro}} : (\mathsf{Pf}\,A \to \mathsf{Pf}\,B) \to \mathsf{Pf}\,(A \Rightarrow B)$	

SOGAT → GAT translation – propositional logic

SOGAT	GAT
For, $- \Rightarrow -$	
$\mathsf{Pf} : \mathsf{For} \to \mathsf{Set}$	
$\Rightarrow_{\mathsf{elim}} : \mathsf{Pf}\,(A \Rightarrow B) \to \mathsf{Pf}\,A \to \mathsf{Pf}\,B$	
$\Rightarrow_{\mathsf{intro}} : (\mathsf{Pf}\,A \to \mathsf{Pf}\,B) \to \mathsf{Pf}\,(A \Rightarrow B)$	$\Rightarrow_{\mathsf{intro}} : \mathsf{Pf}\,(\Gamma \triangleright A)\,B \to \mathsf{Pf}\,\Gamma\,(A \Rightarrow B)$

SOGAT → GAT translation – propositional logic

SOGAT	GAT
For, – ⇒ –	For, – ⇒ –
$\mathsf{Pf} : \mathsf{For} \to \mathsf{Set}$	
$\Rightarrow_{\mathsf{elim}} : \mathsf{Pf}\,(A \Rightarrow B) \to \mathsf{Pf}\,A \to \mathsf{Pf}\,B$	
$\Rightarrow_{\mathsf{intro}} : (\mathsf{Pf}\,A \to \mathsf{Pf}\,B) \to \mathsf{Pf}\,(A \Rightarrow B)$	$\Rightarrow_{\mathsf{intro}} : \mathsf{Pf}\,(\Gamma \triangleright A)\,B \to \mathsf{Pf}\,\Gamma\,(A \Rightarrow B)$

SOGAT → GAT translation – propositional logic

SOGAT	GAT
	Con
For, - ⇒ -	For, - ⇒ -
Pf : For → Set	Pf : Con → For → Set
	$- \triangleright -$: Con → For → Con
$\Rightarrow_{\text{elim}}$: $\text{Pf}\,(A \Rightarrow B) \to \text{Pf}\,A \to \text{Pf}\,B$	$\Rightarrow_{\text{elim}}$: $\text{Pf}\,\Gamma\,(A \Rightarrow B) \to \text{Pf}\,\Gamma\,A \to \text{Pf}\,\Gamma\,B$
$\Rightarrow_{\text{intro}}$: $(\text{Pf}\,A \to \text{Pf}\,B) \to \text{Pf}\,(A \Rightarrow B)$	$\Rightarrow_{\text{intro}}$: $\text{Pf}\,(\Gamma \triangleright A)\,B \to \text{Pf}\,\Gamma\,(A \Rightarrow B)$

SOGAT → GAT translation – propositional logic

SOGAT	GAT
	Con, Sub, $\diamond$ (category with terminal object)
For, $- \Rightarrow -$	For, $- \Rightarrow -$
$\mathsf{Pf} : \mathsf{For} \to \mathsf{Set}$	$\mathsf{Pf} : \mathsf{Con} \to \mathsf{For} \to \mathsf{Set}$
	$-[-] : \mathsf{Pf}\,\Gamma\,A \to \mathsf{Sub}\,\Delta\,\Gamma \to \mathsf{Pf}\,\Delta\,A$ (functorial)
	$- \triangleright - : \mathsf{Con} \to \mathsf{For} \to \mathsf{Con}$
	$(\mathsf{Sub}\,\Delta\,\Gamma \times \mathsf{Pf}\,\Delta\,A) \cong \mathsf{Sub}\,\Delta\,(\Gamma \triangleright A)$
$\Rightarrow_{\mathsf{elim}} : \mathsf{Pf}\,(A \Rightarrow B) \to \mathsf{Pf}\,A \to \mathsf{Pf}\,B$	$\Rightarrow_{\mathsf{elim}} : \mathsf{Pf}\,\Gamma\,(A \Rightarrow B) \to \mathsf{Pf}\,\Gamma\,A \to \mathsf{Pf}\,\Gamma\,B$
	$(\Rightarrow_{\mathsf{elim}}\,t\,u)[\sigma] = \Rightarrow_{\mathsf{elim}}\,(t[\sigma])\,(u[\sigma])$
$\Rightarrow_{\mathsf{intro}} : (\mathsf{Pf}\,A \to \mathsf{Pf}\,B) \to \mathsf{Pf}\,(A \Rightarrow B)$	$\Rightarrow_{\mathsf{intro}} : \mathsf{Pf}\,(\Gamma \triangleright A)\,B \to \mathsf{Pf}\,\Gamma\,(A \Rightarrow B)$
	$(\Rightarrow_{\mathsf{intro}}\,t)[\sigma] = \Rightarrow_{\mathsf{intro}}\,(t[\sigma^{+}])$

SOGAT → GAT translation – propositional logic

SOGAT	GAT
	Con, Sub, ◇ (category with terminal object)
For, – ⇒ –	For, – ⇒ –
$\mathsf{Pf} : \mathsf{For} \to \mathsf{Set}$	$\mathsf{Pf} : \mathsf{Con} \to \mathsf{For} \to \mathsf{Set}$ $–[–] : \mathsf{Pf}\,\Gamma\,A \to \mathsf{Sub}\,\Delta\,\Gamma \to \mathsf{Pf}\,\Delta\,A$ (functorial) $– \triangleright – : \mathsf{Con} \to \mathsf{For} \to \mathsf{Con}$ $(\mathsf{Sub}\,\Delta\,\Gamma \times \mathsf{Pf}\,\Delta\,A) \cong \mathsf{Sub}\,\Delta\,(\Gamma \triangleright A)$
$\Rightarrow_{\mathrm{elim}} : \mathsf{Pf}\,(A \Rightarrow B) \to \mathsf{Pf}\,A \to \mathsf{Pf}\,B$	$\Rightarrow_{\mathrm{elim}} : \mathsf{Pf}\,\Gamma\,(A \Rightarrow B) \to \mathsf{Pf}\,\Gamma\,A \to \mathsf{Pf}\,\Gamma\,B$ $(\Rightarrow_{\mathrm{elim}}\,t\,u)[\sigma] = \Rightarrow_{\mathrm{elim}}\,(t[\sigma])\,(u[\sigma])$
$\Rightarrow_{\mathrm{intro}} : (\mathsf{Pf}\,A \to \mathsf{Pf}\,B) \to \mathsf{Pf}\,(A \Rightarrow B)$	$\Rightarrow_{\mathrm{intro}} : \mathsf{Pf}\,(\Gamma \triangleright A)\,B \to \mathsf{Pf}\,\Gamma\,(A \Rightarrow B)$ $(\Rightarrow_{\mathrm{intro}}\,t)[\sigma] = \Rightarrow_{\mathrm{intro}}\,(t[\sigma^+])$

SOGAT → GAT translation – first-order logic

SOGAT	GAT
	$\mathsf{Con}, \mathsf{Sub}, \diamond$
$\mathsf{Tm} : \mathsf{Set}$	$\mathsf{Tm} : \mathsf{Set}$
	$- \triangleright_{\mathsf{Tm}} : \mathsf{Con} \to \mathsf{Con}$
$\mathsf{For} : \mathsf{Set}$	$\mathsf{For} : \mathsf{Con} \to \mathsf{Set}$
$\mathsf{Pf} : \mathsf{For} \to \mathsf{Set}$	$\mathsf{Pf} : \mathsf{Con} \to \mathsf{For} \to \mathsf{Set}$
	$- \triangleright_{\mathsf{Pf}} - : \mathsf{Con} \to \mathsf{For} \to \mathsf{Con}$

$$\diamond \triangleright_{\mathsf{Tm}} \triangleright_{\mathsf{Pf}} A \triangleright_{\mathsf{Tm}} \triangleright_{\mathsf{Pf}} B : \mathsf{Con}$$

Summary

Summary

In our paper[1]:

- The theory of (SO)GAT signatures
- Two different translations: parallel and single
- Correctness of translation wrt standard presheaf model

Future work:

- Equivalence of the two translations
- Translation with combinators (no context)
- Prove things on the SOGAT level

[1] Kaposi and Xie, "Second-Order Generalised Algebraic Theories: Signatures and First-Order Semantics", *9th International Conference on Formal Structures for Computation and Deduction (FSCD 2024)*.